Devoir Surveillé 08

Le vendredi 7 Avril 2023

14h-18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Partie -A-

On considère l'ensemble $E = \{aI + bJ \;—\; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que l'ensemble E est un espace vectoriel.
   En citer une base et donner sa dimension.
2. Calculer J^2 et montrer que E est stable par le produit matriciel.
3. Quels sont les éléments de E qui ont un inverse dans E ?
4. Résoudre dans E l'équation $X^2 = X$.

Partie -B-

On se propose de déterminer les puissances entières de K.

5. Montrer que $K \in E$ et en déduire qu'il existe des suites (u_n) et (v_n) de nombres réels tels que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad K^n = u_n I + v_n J$.
6. Calculer u_n en fonction de n et en déduire l'expression de K^n.

Partie -C-

On se propose de calculer K^n par une autre méthode.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$; on notera i, j et k les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ associés respectivement à I, J et K en cette base $\mathcal{B}$.

7. Déterminer Ker j et Im j.

8. Quelle est la nature géométrique de j ?

   En déduire une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de j est $J' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (on précisera la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$).

9. Calculer la matrice D de k dans la base $\mathcal{B}'$.
   Déterminer l'expression de la matrice D^n en fonction de l'entier n.

10. En déduire à nouveau l'expression de K^n en fonction de n.

Exercice 2
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0 et y une fonction réelle de la variable réelle x, définie sur I. On donne l'équation différentielle

$$\mathcal{E} : \quad x\,y'' + 2\,y' - x\,y = 4\,x\,e^x$$

1. On pose $\forall\, x \in I, \quad z(x) = x \cdot y(x)$.
   Montrer que y est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle $\mathcal{F}$ que l'on précisera.

2. Résoudre $\mathcal{F}$ sur I.
   En déduire les solutions de $\mathcal{E}$ sur I.

3. On pose $\varphi(x) = \frac{A\,e^x + B\,e^{-x}}{x}$ où A et B sont deux constantes réelles.

   (a) Utiliser un développement limité pour répondre aux questions suivantes ;
   (-1-) A quelle condition la fonction φ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
   (-2-) La fonction ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ?

   (b) Exprimer $\varphi(x)$ en utilisant les fonctions hyperboliques.
   Retrouver alors la condition **(-1-)** ci-dessus.

4. **Raccordement des solutions :**

   (a) Déterminer toutes les solutions de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$ autrement dit les solutions qui sont à la fois solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, continue en 0, dérivable en 0 et telle que les valeurs ainsi posées en 0 vérifient encore $\mathcal{E}$.

   (b) Déterminer l'unique solution y de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y(0) = 0$.

Exercice 3
CAPES 2023 Problème

I. Quelques résultats classiques

Dans cette partie, qui traite de points élémentaires, un soin particulier devra être apporté à la rigueur et à la précision des arguments donnés.

1. Dérivabilité

Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et un élément a de I.

a. Donner une définition de l'assertion «f est dérivable en a».

b. On suppose que f est dérivable en a et on note $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a. Démontrer que f admet un développement limité d'ordre 1 en a, qui est

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + g(x)$$

où g est une fonction négligeable devant $x \mapsto x - a$ en a. *On pourra considérer la fonction* $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$ *si* $x \neq a$ *et* $\varepsilon(a) = 0$.

c. **i.** Démontrer que si f est dérivable en a alors f est continue en a.

ii. Donner, sans démonstration, un contre-exemple pour l'assertion réciproque.

d. Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Démontrer que si f et g sont dérivables en a alors fg l'est aussi. Expliciter $(fg)'(a)$.

e. Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$ et une fonction $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$. Démontrer que si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a. Expliciter $(g \circ f)'(a)$.

2. La fonction logarithme népérien

On appelle fonction logarithme népérien l'unique primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1, on la note ln.
Ainsi ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$.

L'objectif de cette question 2. est de démontrer des propriétés élémentaires du logarithme népérien, dont la plupart figurent au programme de Terminale. À ce stade, ces propriétés sont supposées ne pas encore avoir été établies. De même, la fonction exponentielle de base e *n'est pas supposée avoir été introduite et ne pourra être utilisée.*

a. Démontrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
On pourra considérer, pour $y \in \mathbb{R}_+^*$ *fixé, la fonction* φ *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par*

$$\varphi(x) = \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y).$$

b. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(x^n) = n\ln(x)$ et $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

c. Le but de cette question est de déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $g(xy) = g(x) + g(y)$.
Soit g une telle fonction.

i. Déterminer $g(1)$.

ii. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $g'(xy) = \dfrac{g'(x)}{y}$.

iii. En déduire qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a $g'(y) = \dfrac{c}{y}$.

iv. Déterminer l'ensemble des fonctions g dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ qui sont solutions de l'équation fonctionnelle $g(xy) = g(x) + g(y)$.

II. Première équation fonctionnelle de Cauchy

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ est additive sur $\mathbb{R}$ si, pour tous nombres réels x et y,

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble des fonctions f additives et continues sur $\mathbb{R}$.

3. Résultats préliminaires

Soit f une fonction définie et additive sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer $f(0)$.

b. Démontrer que f est une fonction impaire.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n et tout nombre réel x, $f(nx) = nf(x)$.

d. En déduire que, pour tout nombre rationnel r et tout nombre réel x, $f(rx) = rf(x)$.

e. Démontrer qu'il existe un nombre réel a tel que, pour tout nombre rationnel r, $f(r) = ar$.

4. Première méthode

Soit f une fonction additive et continue sur $\mathbb{R}$.
Déduire de la question **3.** qu'il existe un nombre réel a tel que, pour tout nombre réel x, on a $f(x) = ax$. Conclure.

5. Seconde méthode

Soit f une fonction additive et continue sur $\mathbb{R}$.

a. Après avoir justifié l'existence de ces intégrales, démontrer que, pour tout nombre réel x :

$$f(x) = \int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

b. Démontrer que, pour tout nombre réel x :

$$f(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

c. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.

d. Conclure.

III. Restriction des hypothèses

On pourra, pour les questions suivantes, utiliser les résultats démontrés dans la question **3.**
L'objectif de cette partie est d'examiner l'effet sur la conclusion de la partie **II** de trois restrictions de l'hypothèse de continuité des fonctions additives sur $\mathbb{R}$.

6. Continuité en un point

Soient un nombre réel x_0 et une fonction f additive sur $\mathbb{R}$ continue en x_0.

a. Démontrer que f est continue en 0.

b. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Conclure.

7. Monotonie

Soit une fonction f additive et monotone sur $\mathbb{R}$.
Soit x_0 un nombre réel.

a. Justifier qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

- **i.** pour tout entier naturel n, $(a_n, b_n) \in \mathbb{Q}^2$.
- **ii.** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- **iii.** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x_0$.

b. Démontrer que $f(x_0) = x_0 f(1)$.

c. Conclure.

8. Encadrement

Soient deux nombres réels α et β, avec $\alpha < \beta$, et une fonction f additive sur $\mathbb{R}$ et bornée sur $[\alpha;\beta]$.
Soit x un nombre réel.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, il existe un nombre rationnel r_n tel que $nx - r_n \in [\alpha;\beta]$.

b. On pose $f(1) = a$. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$|f(nx - r_n)| \geqslant n\,|f(x) - ax| - |a|\,|nx - r_n|.$$

c. Conclure.